Capítulo 6

Memoria Asociativa Hopfield.

6.1. Contexto.

Si 1972 fue el año de los pioneros en el área de las memorias asociativas, 1982 fue el año de John J. Hopfield. Su artículo de ese año (Hopfield, 1982), publicado por la prestigiosa y respetada *National Academy of Sciences* (en sus *Proceedings*), impactó positivamante y trajo a la palestra internacional su memoria asociativa.

Las autorizadas voces de los editores del compendio *Neurocomputing* (Anderson. & Rosenfeld (Eds.), 1990) aseguran que la era moderna de las memorias asociativas (y de las redes neuronales) nace a raíz de la publicación del artículo de Hopfield; afirman que el éxito de este artículo se debe en gran parte a que. además de tener un estilo claro. coherente y sofisticado. fue escrito por el distinguido y reconocido físico John J. Hopfield. "en cuyas manos la teoría se convierte en algo legítimo y respetable".

La formación como físico del autor queda de manifiesto cuando declara que en los sistemas físicos constituidos por un gran número de elementos simples, las interacciones entre estos elementos dan lugar a fenómenos colectivos (las orientaciones de los dominios en sistemas magnéticos y los patrones de vórtices en sistemas de fluidos ejemplifican esta afirmación).

A partir de estas consideraciones, Hopfield se pregunta si la interacción de elementos simples de procesamiento similares a las *neuronas*. cuyo modelo simplificado se conocía desde hacía cuatro décadas (McCulloch & Pitts, 1943), da lugar a la aparición de propiedades computacionales colectivas, tales como la estabilidad de memorias; acto seguido, el autor afirma que en efecto, su artículo de 1982 demuestra que este tipo de propiedades computacionales aparecen espontáneamente.

Este capítulo está dedicado a la, hoy famosa, Memoria Asociativa Hopfield.

6.2. El trabajo de Hopfield.

En el legendario artículo (Hopfield, 1982) se considera un sistema físico descrito por un vector de estado $\mathbf{x}$ cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; se considera además que el sistema tiene puntos límite localmente estables $\mathbf{x}^a, \mathbf{x}^b \cdots$. Entonces, si el sistema es activado en un estado suficientemente cercano a cualquier punto límite localmente estable, digamos en $\mathbf{x} = \mathbf{x}^a + \Delta$, al transcurrir el tiempo el estado del sistema cambiará hasta llegar a que se cumpla $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^a$.

El punto de arranque $\mathbf{x}^a + \Delta$ representa un conocimiento parcial del estado estable $\mathbf{x}^a$, y a partir de ahí el sistema genera la información correcta $\mathbf{x}^a$. Hopfield declara categóricamente que un sistema físico que se comporte de esta manera y que, además, sea susceptible de que *cualquier* conjunto predeterminado de estados pueda ser asignado como el conjunto de estados localmente estables, es útil como memoria asociativa.

Es preciso hacer notar la semejanza de estos puntos límite localmente estables de Hopfield, con los estados de equilibrio que pueden retener persistentemente, sin entradas externas, las redes de elementos de umbral de Amari, al actuar como memorias asociativas (ver capítulo anterior).

En el modelo que originalmente propuso Hopfield, cada neurona x_i tiene dos posibles estados, a la manera de las neuronas de McCulloch-Pitts: $x_i =$ y $x_i = 1$; sin embargo, en la sección *Studies of the collective behaviors of the model* del mismo artículo, el autor hace la relevante observación de que, para un nivel dado de exactitud en la recuperación de patrones, la capacidad de almacenamiento de información de la memoria se puede incrementar por un factor de 2, si se escogen como posibles estados de las neuronas los valores $x_i = -1$ y $x_i = 1$ en lugar de los valores originales $x_i = 0$ y $x_i = 1$.

Al utilizar el conjunto $\{1, -1\}$ y el valor de umbral cero, la fase de aprendizaje para la memoria Hopfield será similar, en cierta forma, a la fase de aprendizaje del *Linear Associator*.

La intensidad de la fuerza de conexión de la neurona x_i a la neurona x_j se representa por el valor de m_{ij}, y se considera que hay simetría, es decir, $m_{ij} = m_{ji}$. Si x_i no está conectada con x_j, entonces $m_{ij} = 0$; en particular, no hay conexiones recurrentes de una neurona a sí misma, lo cual significa que $m_{ii} = 0, \forall i$. El estado instantáneo del sistema está completamente especificado por el vector columna de dimensión n cuyas coordenadas son los valores de las n neuronas.

La memoria Hopfield es autoasociativa, simétrica, con ceros en la diagonal principal.

En virtud de que la memoria es autoasociativa, el conjunto fundamental para la memoria Hopfield es $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \ldots, p\}$ con

$$\mathbf{x}^\mu = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \in A^n \quad \text{y} \quad A = \{1, -1\}$$

La *fase de aprendizaje* para la memoria Hopfield es similar a la fase de aprendizaje del *Linear Associator*, con una diferencia relacionada con la diagonal principal en ceros, como se muestra en la siguiente regla para obtener la ij-ésima componente de la memoria Hopfield $\mathbf{M}$:

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{p} x_i^\mu x_j^\mu & \text{si } x \neq j \\ 0 & \text{si } x = j \end{cases} \tag{6.1}$$

Operativamente, el resultado de la expresión anterior se puede obtener en tres etapas:

1.- Para cada una de las p asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se encuentra la matriz $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ de dimensiones $n \times n$, la cual tiene unos en su diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_n^\mu \end{pmatrix} \cdot (x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_n^\mu)$$

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu x_1^\mu & x_1^\mu x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & x_2^\mu x_2^\mu & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & x_i^\mu x_2^\mu & \cdots & x_i^\mu x_i^\mu & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & x_n^\mu x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & x_n^\mu x_n^\mu \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

2.- A cada una de las p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$ se le resta la matriz identidad $\mathbf{I}$ de dimensiones $n \times n$, con el fin de lograr ceros en la diagonal principal:

$$\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & x_1^\mu x_2^\mu & \cdots & x_1^\mu x_i^\mu & \cdots & x_1^\mu x_n^\mu \\ x_2^\mu x_1^\mu & 0 & \cdots & x_2^\mu x_i^\mu & \cdots & x_2^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_i^\mu x_1^\mu & x_i^\mu x_2^\mu & \cdots & 0 & \cdots & x_i^\mu x_n^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^\mu x_1^\mu & x_n^\mu x_2^\mu & \cdots & x_n^\mu x_i^\mu & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

3.- Se suman la p matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}$ para finalmente obtener la memoria $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \sum_{\mu=1}^{p} \left[\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}\right] = [m_{ij}]_{n\times n} \tag{6.4}$$

La forma en que se lleva a cabo la *fase de recuperación* para la memoria Hopfield cambia drásticamente respecto de lo que sucede en el *Linear Associator*. Al presentar un patrón de entrada $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria Hopfield, ésta cambiará su estado con el tiempo, de modo que cada neurona x_i ajuste su valor de acuerdo con el resultado que arroje la comparación de la cantidad

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j$$

con un valor de umbral cuyo valor es normalmente cero.

Representemos el estado de la memoria Hopfield en el tiempo t por $\mathbf{x}(t)$: entonces $x_i(t)$ representa el valor de la neurona x_i en el tiempo t y $x_i(t+1)$ el valor de x_i en el tiempo siguiente $(t+1)$.

Dado un vector columna de entrada $\tilde{\mathbf{x}}$, la fase de recuperación consta de tres pasos:

1. Para $t = 0$, se hace $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}$; es decir, $x_i(0) = \tilde{x}_i, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$
2. $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ se calcula $x_i(t+1)$ de acuerdo con la condición siguiente:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) > 0 \\ x_i(t) \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) = 0 \\ -1 \text{ si } \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(t) < 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

3. Se compara $x_i(t+1)$ con $x_i(t)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Si $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ el proceso termina y el vector recuperado es $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. De otro modo, el proceso continúa de la siguiente manera: los pasos 2 y 3 se iteran tantas veces como sea necesario hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $x_i(\tau+1) = x_i(\tau)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$: el proceso termina y el patrón recuperado es $\mathbf{x}(\tau)$.

El proceso de convergencia descrito en el paso 3 de la fase de recuperación, indica que el sistema llega a un punto límite localmente estable en el tiempo τ.

La existencia de τ está garantizada a través de la demostración que hace Hopfield de que existen puntos límite localmente estables en su modelo de memoria asociativa: para ello, define E de la siguiente manera, tomando en cuenta la condición de que $m_{ii} = 0, \forall i$:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_ix_j \tag{6.6}$$

y acto seguido demuestra que E es una función de x_i monótona decreciente.

Además de la demostración sugerida por Hopfield, los investigadores McEliece *et. al.* esbozan otro camino para demostrar la convergencia de la expresión 6.6, en un importante trabajo donde analizan la capacidad de la memoria asociativa Hopfield (McEliece, Posner, Rodemich, & Venkatesh, 1987). Los desarrollos de la sugerencia de Hopfield y del esbozo de demostración de McEliece *et. al.* se presentan en el apéndice de esta obra.

El riguroso análisis de McEliece *et. al.* arroja como resultado principal que la memoria Hopfield es capaz de recuperar en forma perfecta $\frac{n}{4logn}$ patrones donde n es la dimensión de los patrones.

Si se suaviza la restricción de que *todos* los patrones sean recuperados en forma perfecta, y se cambia por la condición de que la *mayoría* lo sean, entonces la capacidad se duplica: ahora la memoria Hopfield es capaz de recuperar $\frac{n}{2logn}$ patrones, permitiendo leves errores.

En el artículo original de 1982, Hopfield había estimado empíricamente que su memoria tenía una capacidad de recuperar $0{,}15n$ patrones, y en (Abu-Mostafa & St. Jacques, 1985) se había establecido formalmente que una cota superior para el número de vectores de estado arbitrarios estables en una memoria Hopfield es n.

Es pertinente apuntar que, como ya se ha mencionado antes en el capítulo 6, el teorema **2** del artículo (Amari, 1972) es un importante antecedente para este resultado de Hopfield. Los resultados son equivalentes pero con una presentación ligeramente diferente: Amari presenta el teorema de la convergencia de las redes de elementos de umbral en términos de estados de equilibrio que son alcanzados por la red en un número finito de transiciones de estado.

Ejemplo.

Para ejemplificar la memoria Hopfield, usaremos patrones de dimensión $n = 4$; iniciemos con tres vectores ($p = 3$).

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos, de acuerdo con las expresiones 6.1, 6.2 y 6.3, las matrices $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 \cdot (\mathbf{x}^1)^t - \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,-1,-1,1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 \cdot (\mathbf{x}^2)^t - \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1,1,-1,1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^3 \cdot (\mathbf{x}^3)^t - \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-1,-1,1,-1) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La memoria Hopfield $\mathbf{M}$ se obtiene a partir de la suma de las matrices, como lo indica la expresión 6.4 que corresponde al tercer paso de la fase de aprendizaje:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \sum_{\mu=1}^{3} \mathbf{x}^{\mu} \cdot (\mathbf{x}^{\mu})^{t} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Con la obtención de la memoria $\mathbf{M}$ concluye la fase de aprendizaje.

Ahora se le presentará el patrón $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^3$ a la memoria $\mathbf{M}$ para llevar cabo la fase de recuperación.

El primer paso consiste en realizar la asignación $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}}$. Entonces se tiene:

$$
\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Se requiere calcular la cantidad

$$
\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j(0)
$$

$\forall i$ antes de aplicar la condición del paso 2; esto se logra operando el producto de la matriz $\mathbf{M}$ por el vector $\mathbf{x}(0)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(1)+1\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(-1)+(0)\cdot(-1)+(-1)\cdot(1)+1\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+(0)\cdot(1)+(-3)\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1)+(1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(1)+(0)\cdot(-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es decir: $\sum\limits_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(0) = -1$, $\sum\limits_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(0) = -1$, $\sum\limits_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(0) = 5$ y $\sum\limits_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(0) = -3$

Ahora apliquemos el paso 2 a cada una de las coordenadas:

$$\begin{aligned}
x_1(1) &= -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(0) = -1 < 0 \\
x_2(1) &= -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(0) = -1 < 0 \\
x_3(1) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(0) = 5 > 0 \\
x_4(1) &= -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(0) = -3 < 0
\end{aligned}$$

El paso 3 indica que se realicen las comparaciones de $x_i(t+1)$ con $x_i(t)$ $\forall i \in \{1,2,3,...,n\}$; veamos:

$$
\begin{aligned}
x_1(1) &= -1 = x_1(0) \\
x_2(1) &= -1 = x_2(0) \\
x_3(1) &= 1 = x_3(0) \\
x_4(1) &= -1 = x_4(0)
\end{aligned}
$$

Lo anterior significa que $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(0)$. Por lo tanto, el patrón recuperado es el mismo $\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^3$.

Analicemos lo que sucede en la fase de recuperación al presentarle el patrón $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^1$ a la memoria $\mathbf{M}$. Primer paso:

$$
\mathbf{x}(0) = \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Igual que antes, previamente a la aplicación de la condición del paso 2 se requiere calcular la cantidad $\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j(0)$, $\forall i$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (0) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (-1) + (-3) \cdot (1) \\ 1 \cdot 1 + (1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (0) \cdot (1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(0) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 2 en cada una de las coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(0) = 3 > 0 \\ x_2(1) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(0) = 1 > 0 \\ x_3(1) &= -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(0) = -3 < 0 \\ x_4(1) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(0) = 1 > 0 \end{aligned}$$

El paso 3 indica que se realicen las comparaciones de $x_i(t+1)$ con $x_i(t)$ $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; veamos:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 1 = x_1(0) \\ x_2(1) &= 1 \neq x_2(0) \\ x_3(1) &= -1 = x_3(0) \\ x_4(1) &= 1 = x_4(0) \end{aligned}$$

Para la coordenada 2 no se cumple la igualdad, y esto significa que $\mathbf{x}(1) \neq \mathbf{x}(0)$ y que $\tau \neq 0$: se deben iterar los pasos 2 y 3.

Producto de la matriz $\mathbf{M}$ por el vector $\mathbf{x}(1)$:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + (-1)\cdot(1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot(1) + (0)\cdot(1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot(1) + (-1)\cdot(1) + (0)\cdot(-1) + (-3)\cdot(1) \\ 1\cdot 1 + (1)\cdot(1) + (-1)\cdot(-1) + (0)\cdot(1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(1) \\ \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al aplicar el paso 2 a cada una de las coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1(2) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{1j}x_j(1) = 1 > 0 \\ x_2(2) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{2j}x_j(1) = 1 > 0 \\ x_3(2) &= -1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{3j}x_j(1) = -5 < 0 \\ x_4(2) &= 1 \text{ porque } \sum_{j=1}^{3} m_{4j}x_j(1) = 1 > 0 \end{aligned}$$

Apliquemos el paso 3 $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} x_1(2) &= 1 = x_1(1) \\ x_2(2) &= 1 = x_2(1) \\ x_3(2) &= -1 = x_3(1) \\ x_4(2) &= 1 = x_4(1) \end{aligned}$$

Lo anterior significa que $\mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(1)$. Por lo tanto, el patrón recuperado es:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \tilde{\mathbf{x}}$$

6.3. Consideraciones finales del capítulo.

En este capítulo hemos presentado uno de los trabajos clásicos en memorias asociativas: La Memoria Asociativa Hopfield, cuyo autor es el físico norteamericano John Hopfield quien es responsable, según voces autorizadas. de haber revivido el interés, a principios de los ochenta del siglo XX. en las redes neuronales y en particular en las memorias asociativas, después de un período de estancamiento de más de una década.

Dos años después de haber publicado su famoso artículo (Hopfield, 1982), el autor publica un nuevo artículo donde describe las memorias asociativas con valores reales (Hopfield. 1984). Para entonces, ya se había desatado un furor por las memorias asociativas y las redes neuronales entre los científicos e ingenieros involucrados con este tipo de temas.

En la actualidad. el Profr. Hopfield dirige exitosamente el Hopfield Group en Princeton University (www.hopfield.net/~group/). Entre los interesantes temas que actualmente investiga el grupo. se encuentra la implementación neuronal de la percepción de olores (Hopfield, J. J.. Odor Space and Olfactory Processing: Collective Algorithms and Neural Implementation, PNAS (1999)).